

Actividades

1. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo α del segundo cuadrante, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$.

De $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ se obtiene

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} =$$

$\pm \frac{3}{5}$. Como α está en el tercer cuadrante, su coseno es

negativo. Luego la solución válida es $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Por tanto, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$.

2. Si $\cos 24^\circ = 0,91$, determina, sin utilizar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
a) 114° , b) 156° , c) 204° , d) 336° .

$$\operatorname{sen} 24^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 24^\circ} = \sqrt{1 - (0,91)^2} \approx 0,41.$$

$$\text{Además, } \operatorname{tg} 24^\circ = \frac{\operatorname{sen} 24^\circ}{\cos 24^\circ} = \frac{0,41}{0,91} \approx 0,45$$

a) Como $114^\circ = 90^\circ + 24^\circ$ será:

$$\operatorname{sen} 114^\circ = \cos 24^\circ = 0,91$$

$$\cos 114^\circ = -\operatorname{sen} 24^\circ = -0,41$$

$$\operatorname{tg} 114^\circ = -\operatorname{cotg} 24^\circ = -2,22.$$

b) Como $156^\circ = 180^\circ - 24^\circ$ será:

$$\operatorname{sen} 156^\circ = \operatorname{sen} 24^\circ = 0,41$$

$$\cos 156^\circ = -\cos 24^\circ = -0,91$$

$$\operatorname{tg} 156^\circ = -\operatorname{tg} 24^\circ = -0,45.$$

c) Como $204^\circ = 180^\circ + 24^\circ$ será:

$$\operatorname{sen} 204^\circ = -\operatorname{sen} 24^\circ = -0,41$$

$$\cos 204^\circ = -\cos 24^\circ = -0,91$$

$$\operatorname{tg} 204^\circ = \operatorname{tg} 24^\circ = 0,45.$$

d) Como $336^\circ = 360^\circ - 24^\circ$ será:

$$\operatorname{sen} 336^\circ = -\operatorname{sen} 24^\circ = -0,41$$

$$\cos 336^\circ = \cos 24^\circ = 0,91$$

$$\operatorname{tg} 336^\circ = -\operatorname{tg} 24^\circ = -0,45.$$

3. Si $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha \in \text{I cuadrante}$) y

$\operatorname{tg} \beta = -2$ ($\beta \in \text{II cuadrante}$), calcula sin utilizar la calculadora, el valor de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{ (elegimos el signo posi-}$$

tivo de la raíz cuadrada pues α es un ángulo del primer cuadrante). Además, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$.

De la relación $1 + \operatorname{tg}^2 \beta = \sec^2 \beta$ deducimos que

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (con signo menos pues está en el segundo cuadrante):}$$

$$\text{también } \operatorname{sen} \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (elegimos el}$$

signo positivo de la raíz cuadrada pues β es del segundo cuadrante).

Sustituimos estos valores y obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta =$$

$$\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-2 - \frac{4}{3}}{1 + (-2) \cdot \frac{4}{3}} = 2$$

4. Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{5}$ ($\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$), determina sin calculadora, el valor de $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Empezamos calculando el valor de $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Aplicando la fórmula del seno del ángulo doble será:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

Y aplicando la fórmula del coseno del ángulo mitad será:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{2\sqrt{6}}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{6}}{10}}$$

elegimos el signo $-$ pues el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ está en el segundo cuadrante).

5. Calcula el valor de la expresión $\frac{\operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 50^\circ}$.

Utilizando las fórmulas de transformación se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 50^\circ} &= \frac{2\operatorname{sen} \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{70^\circ - 50^\circ}{2}}{-2\operatorname{sen} \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{70^\circ - 50^\circ}{2}} = \frac{2\operatorname{sen} 60^\circ \cos 10^\circ}{-2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 10^\circ} \\ &= -\operatorname{cotg} 10^\circ \end{aligned}$$

6. Comprueba la identidad $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

7. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x (2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

las soluciones del primer giro son 0° , 60° , 180° y 300° .

Problemas propuestos

Tipo I. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

1. Si $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{2}$ y α es del cuarto cuadrante, calcula sin hallar el valor de α , sus restantes razones trigonométricas.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= -\frac{2}{5}, \operatorname{cos} \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ (elegimos el signo } + \text{ pues el ángulo está en el cuarto cuadrante).} \\ \Rightarrow \sec \alpha &= \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}. \\ \text{Y } \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}; \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}.\end{aligned}$$

2. Si $\alpha = -0,76$ y α es del segundo cuadrante, calcula sin hallar el valor de α , sus restantes razones trigonométricas.

$$\begin{aligned}\sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-0,76} = -1,315789474. \\ \operatorname{sen} \alpha &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-0,76)^2} = 0,649923072 \\ \text{(elegimos el signo } + \text{ pues el ángulo es del segundo cuadrante)} \\ \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha &= 1,538643637. \\ \text{Por último, } \operatorname{tg} \alpha &= \frac{0,6499...}{-0,76} = -0,855161936; \\ \operatorname{cotg} \alpha &= -1,169369165.\end{aligned}$$

3. De un ángulo α del primer cuadrante se conoce que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$. Calcula el valor exacto de:

- a) $\operatorname{tg} \alpha$ b) $\operatorname{sen} (2\alpha)$

$$\begin{aligned}\text{a) } \operatorname{cos} \alpha &= \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3} \\ \text{(elegimos el signo } + \text{ pues } \alpha \text{ es del primer cuadrante). Por} \\ \text{tanto, } \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{1/3}{\sqrt{8}/3} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \\ \text{b) } \operatorname{sen} 2\alpha &= 2\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{8}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.\end{aligned}$$

4. Si $\operatorname{cotg} \alpha = -2$ y $\operatorname{sen} \beta = 4\operatorname{cos} \beta$ calcula:
a) $\operatorname{tg} 2\alpha$ b) $\operatorname{tg} (\alpha - \beta)$

$$\text{Si } \operatorname{cotg} \alpha = -2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} \beta = 4\operatorname{cos} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 4. \text{ Luego:}$$

$$\text{a) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{-\frac{1}{2} - 4}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4} = \frac{9}{2}$$

5. Calcula las razones del ángulo $\alpha + \beta$ sabiendo que
 $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y
 $\operatorname{cos} \beta = -\frac{1}{3}$, con $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

$$\begin{aligned}\text{Si } \operatorname{sen} \alpha &= \frac{1}{4}, \text{ al ser } \alpha \text{ del primer cuadrante, será } \operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \text{y } \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sqrt{15}}{15}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } \operatorname{cos} \beta &= -\frac{1}{3}, \text{ al ser } \beta \text{ del segundo cuadrante, será } \operatorname{sen} \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \text{y } \operatorname{tg} \beta &= -2\sqrt{2}. \text{ Luego } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{-1 + \sqrt{120}}{12}; \\ \operatorname{cos}(\alpha + \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{-\sqrt{15} - \sqrt{8}}{12} \text{ y}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{15} - \sqrt{8}}{1 - \frac{\sqrt{15}}{15} \cdot (\sqrt{-8})} = \frac{\sqrt{15} - 15\sqrt{8}}{15 + \sqrt{120}}$$

6. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

- a) $\operatorname{sen} 2\alpha$ b) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$
c) $\operatorname{cos} (\pi + \alpha)$ d) $\operatorname{tg} (\pi - \alpha)$

$$\begin{aligned}\text{Si } \operatorname{sen} \alpha &= \frac{1}{3}, \text{ y } \alpha \text{ del segundo cuadrante, será } \operatorname{cos} \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ y} \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Luego,}\end{aligned}$$

$$\text{a) } \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}}$$

$$\text{(elegimos el signo } + \text{ pues } \frac{\alpha}{2} \text{ está en el primer cuadrante),}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \operatorname{cos} (\pi + \alpha) &= \operatorname{cos} \pi \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \alpha = \\ &= -1 \cdot \operatorname{cos} \alpha - 0 \cdot \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{cos} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} (\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \pi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{1 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

7. Sin utilizar calculadora, determina el valor numérico de la expresión: $\frac{2}{5}\sin 330^\circ - \frac{1}{4}\tan 135^\circ + 2\cos 270^\circ - \frac{1}{6}\tan 240^\circ$.

Dado que $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$; $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$; $\cos 270^\circ = 0$ y que $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, la expresión dada

$$\frac{2}{5}\sin 330^\circ - \frac{1}{4}\tan 135^\circ + 2\cos 270^\circ - \frac{1}{6}\tan 240^\circ \text{ vale}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - \frac{1}{6} \cdot (\sqrt{3}) =$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3-10\sqrt{3}}{60}$$

8. Calcula el valor numérico de las expresiones:

a) $\cos 195^\circ - \cos 75^\circ$

b) $\frac{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ}$

a) $\cos 195^\circ - \cos 75^\circ = -2\sin \frac{195^\circ + 75^\circ}{2} \sin \frac{195^\circ - 75^\circ}{2}$
 $= -2\sin 135^\circ \sin 60^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2\sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2}}{2\cos \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2}} =$
 $= \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ}{2\cos 30^\circ \cos 10^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Tipo II. Identidades. Fórmulas de adición y transformación

9. Demuestra que:

a) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

b) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

a) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) =$
 $= (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) =$
 $= \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta =$
 $= \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \sin^2 \beta =$
 $= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

b) Para demostrar la segunda igualdad, en (*) hacemos

$$= (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) =$$

$$= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$$

10. Comprueba las siguientes identidades:

a) $\cotg \alpha - \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{\cotg \alpha} = \tan \alpha$

b) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

b) $\cotg \alpha - \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{\cotg \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{\frac{1}{\tan^2 \alpha} - 1}{\frac{1}{\tan \alpha}} =$

$$= \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{\frac{1 - \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha}}{\frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1 - \tan^2 \alpha}{\tan \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \alpha} = \tan \alpha$$

b) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$ (dividimos por $\cos^2 \alpha$ en el numerador y

$$\text{denominador}) \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

11. Comprueba la identidad:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

Desarrollamos el primer miembro: $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot \cos 2\alpha =$

$$= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha$$

12. Comprueba la identidad: $\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Operamos en el primer miembro: $\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} =$

$$= \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

13. Comprueba la identidad:

$$2\cos \alpha \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Desarrollamos el primer miembro: $2\cos \alpha \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) =$

$$= 2\cos \alpha \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 =$$

$$= 2\cos \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 =$$

$$= 2\cos \alpha \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\cos \alpha \cdot \frac{2}{4} \cdot \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\
 &= \cos \alpha \cdot \left(1 + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha (1 + \sin \alpha) = \\
 &= \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$

14. Simplifica la expresión: $\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha} = \\
 &= \frac{2\cos \frac{5\alpha + 3\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha - 3\alpha}{2}}{2\cos \frac{5\alpha + 3\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha - 3\alpha}{2}} = \frac{2\cos 4\alpha \sin \alpha}{2\cos 4\alpha \cos \alpha} = \tan \alpha
 \end{aligned}$$

15. ¿Es cierta la igualdad $\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sec \alpha + \tan \alpha$?

No es cierta, pues si desarrollamos el primer miembro:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\
 &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \\
 &= \sec \alpha + \cot \alpha \quad \text{que, en general, es distinto que } \sec \alpha + \tan \alpha.
 \end{aligned}$$

16. Expresa $\tan 3\alpha$ en función de $\tan \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \tan 3\alpha &= \tan (2\alpha - \alpha) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha} = \frac{\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} - \tan \alpha}{1 - \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \tan \alpha} = \\
 &= \frac{\frac{2\tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}{1 - \frac{2\tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

17. Expresa $\sin 4\alpha$ en función de:

a) $\sin \alpha$; b) $\cos \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \cos 4\alpha &= \cos 2(2\alpha) = \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = \\
 &= 1 - \sin^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = \\
 &= 1 - \sin^2(2\alpha) = 1 - 2(2\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \\
 &= 1 - 8\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\
 &= 1 - 8\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 1 - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha \\
 \text{b) En } &= 1 - 8(1 - \cos^2 \alpha)\cos^2 \alpha = 1 - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha
 \end{aligned}$$

18. Expresa $\sin 4\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \sin 4\alpha &= \sin 2(2\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = \\
 &= 2 \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\
 &= 4\sin \alpha \cos \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) = 4\sin \alpha \cos \alpha - 8\sin^3 \alpha \cos \alpha = \\
 &\text{También se puede poner en } = 4\sin \alpha \cos \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) = \\
 &= 8\sin \alpha \cos^3 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

19. Expresa $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$ en función de $\tan \frac{x}{2}$.

$$\bullet \tan x = \tan \left(2 \frac{x}{2} \right) = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

- Para expresar $\sin x$, partimos de la relación $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

Sustituyendo en esta expresión el valor obtenido para $\tan x$ resulta:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 x &= \frac{\left(\frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \right)^2}{1 + \left(\frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \right)^2} = \frac{4\tan^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right)^2} \Rightarrow \\
 \sin x &= \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

- Como $\cos x = \frac{\sin x}{\tan x}$, resulta, sustituyendo las relaciones obtenidas anteriormente, que $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$.

Tipo III. Ecuaciones y sistemas trigonométricos

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $2\sin 2x = 1$ b) $3\tan 2x = \sqrt{3}$
c) $3\cos \frac{x}{2} = 1,5$ d) $5\sin 4x = 0$

a) $2\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$2x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 15^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 75^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son: 15° , 75° , 195° y 255° .

b) $3\tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k \cdot \pi}{2}$

las soluciones del primer giro son $\frac{\pi}{12}$ (para $k = 0$), $\frac{7\pi}{12}$ (para

$k = 1$), $\frac{13\pi}{12}$ (para $k = 2$) y $\frac{19\pi}{12}$ (para $k = 3$).

c) $3\cos \frac{x}{2} = 1,5 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1,5}{3} = 0,5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$$x = \begin{cases} 120^\circ + k \cdot 720^\circ \\ 600^\circ + k \cdot 720^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

Las soluciones del primer giro de la variable son: 120° y 600° .

d) $5 \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 0 + k \cdot \frac{\pi}{4}$.

Las soluciones del primer giro son:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}.$$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} k \cdot 2\pi \\ \frac{10\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro: 0 y $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\sin(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45^\circ + x = \begin{cases} 225^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 315^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 180^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 270^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son 180° y 270° .

22. Resuelve la ecuación: $\cos x = \sin 2x$

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2 \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Las soluciones del primer giro son 90° , 270° , 30° y 150° .

23. Resuelve la ecuación: $\cos 3x + \sin x = \cos x$

Teniendo en cuenta que $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$, la ecuación inicial se puede expresar así: $\cos 3x + \sin x = \cos x \Leftrightarrow \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x - 1) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x (-4 \sin^2 x) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (1 - 4 \sin x \cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sin x (1 - 2 \sin 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 - 2 \sin 2x = 0 \end{cases}$$

- Si $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$.
- Si $1 - 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 75^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Las soluciones del primer giro son: 0° , 180° , 15° , 195° , 75° y 255° .

24. Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2} \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$\sin x = \sqrt{2} (1 - \sin^2 x)$ que da lugar a la ecuación de segundo

grado en $\sin x$, $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$ cuyas soluciones son

$$\sin x = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \text{ (imposible)} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 135^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son 45° y 135° .

25. Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \end{cases}$$

- Si $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$
- Si $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \operatorname{tg} x = +\sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{Si } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son: 0° , 180° , 60° , 240° , 120° y 300° .

26. Resuelve la ecuación: $\sin 2x \cos x = 3 \sin^2 x$

$$\sin 2x \cos x = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \cos x = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x (1 - \sin^2 x) = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x - 2 \sin^3 x - 3 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x) = 0.$$

- Si $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$.
- Si $2 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$ que es una ecuación de 2º grado cuyas soluciones son

$$\sin x = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}. \text{ La solución } \sin x = -2 \text{ no es posible. Si}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Las soluciones del primer giro son 0° , 180° , 30° y 150° .

27. Resuelve la ecuación: $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

$$\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5 \cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0, \text{ ecuación de segundo grado en } \cos x,$$

$$\text{cuya solución es } \cos x = \begin{cases} -1/2 \\ -2 \text{ (imposible)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \arccos(-1/2) = \begin{cases} 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow (k \in \mathbb{Z})$$

Las soluciones del primer giro son 120° y 240° .

28. Resuelve la ecuación: $\sin(2x + 40^\circ) + \sin(x + 20^\circ) = 0$.

$$\sin(2x + 40^\circ) + \sin(x + 20^\circ) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x + 60^\circ}{2} \cos \frac{x + 20^\circ}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\bullet \text{ Si } \sin \frac{3x + 60^\circ}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x + 60^\circ}{2} = \begin{cases} 0^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x + 60^\circ = \begin{cases} 0^\circ + k \cdot 720^\circ \\ 360^\circ + k \cdot 720^\circ \end{cases} \Rightarrow 3x = \begin{cases} -60^\circ + k \cdot 720^\circ \\ 300^\circ + k \cdot 720^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \begin{cases} -20^\circ + k \cdot 240^\circ \\ 100^\circ + k \cdot 240^\circ \end{cases}$$

- Si $\cos \frac{x+20^\circ}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x+20^\circ}{2} = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$
 $\Rightarrow x+20^\circ = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 160^\circ + k \cdot 360^\circ$
 Las soluciones del primer giro son 220° , 100° , 340° y 160° .

29. Resuelve la ecuación: $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

La ecuación planteada es equivalente a

$$-2\sin \frac{2x+6x}{2} \sin \frac{2x-6x}{2} = 2\sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin 4x \sin(-2x) = \sin 4x \cos x \Leftrightarrow \sin 4x(\cos x - \sin 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

- Si $\sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 45^\circ$
- Si $\cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Las soluciones del primer giro son 0° , 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° , 30° y 150° .

30. Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$

De la segunda ecuación, $x = 90^\circ - y$. Sustituyendo en la primera, $\sin(90^\circ - y) + \sin y = 1 \Leftrightarrow \sin 90^\circ \cos y - \cos 90^\circ \sin y + \sin y = 1 \Leftrightarrow \cos y + \sin y = 1$ cuyas soluciones son (está resuelta en los ejemplos del texto) $y = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$ ó $y = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$. En el primer giro, si $y = 0^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$ y si $y = 90^\circ \Rightarrow x = 0^\circ$. Las soluciones del primer giro son, pues, $(90^\circ, 0^\circ)$ y $(0^\circ, 90^\circ)$.

31. Resuelve el sistema $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$

Si sumamos y restamos las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ se obtiene este otro:}$$

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Este da lugar a estos otros dos:

$$(I) \begin{cases} x+y=90^\circ+k_1 \cdot 360^\circ \\ x-y=30^\circ+k_2 \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ y } (II) \begin{cases} x+y=90^\circ+k_1 \cdot 360^\circ \\ x-y=150^\circ+k_2 \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones de (I) son de la forma

$$[60^\circ + (k_1 + k_2) \cdot 180^\circ, 30^\circ + (k_1 - k_2) \cdot 180^\circ].$$

Las de (II) son de la forma

$$[120^\circ + (k_1 + k_2) \cdot 180^\circ, -30^\circ + (k_1 - k_2) \cdot 180^\circ] \\ \Leftrightarrow [120^\circ + (k_1 + k_2) \cdot 180^\circ, 330^\circ + (k_1 - k_2) \cdot 180^\circ].$$

Las soluciones particulares se obtienen dando valores a k_1 y k_2 .

k_1 y k_2	Sistema (I)	Sistema (II)
$k_1 = k_2 = 0$	$(60^\circ, 30^\circ)$	$(120^\circ, 330^\circ)$
$k_1 = 1, k_2 = 0$	$(240^\circ, 210^\circ)$	$(300^\circ, 330^\circ)$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más. (En este caso puedes consultar algunas fórmulas).

1. El ángulo $\frac{11\pi}{6}$ rad expresado en grados sexagesimales vale:

a) 330° b) 165° c) 150°

a) 330°

2. $1 + \tan^2 \alpha$ es igual a:

a) $\sin^2 \alpha$ b) $\operatorname{cosec}^2 \alpha$ c) $\sec^2 \alpha$

c) $\sec^2 \alpha$

3. Las razones trigonométricas del ángulo 2550° son las mismas que las del ángulo:

a) 50° b) 30° c) 210°

b) 30°

4. Si $\tan \alpha > 0$, sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ c) $\alpha > 3$

b) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

5. De las siguientes fórmulas sólo una es cierta para cualquier valor de letra griega alfa:

a) $\sin(180^\circ + \alpha) = \sin(360^\circ - \alpha)$

b) $\sin(180^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

c) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ + \alpha)$

a) $\sin(180^\circ + \alpha) = \sin(360^\circ - \alpha)$

6. Señala la fórmula verdadera:

a) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \beta$

b) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta$

c) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta$

a) $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \beta$

7. El valor de la expresión $\frac{\operatorname{tg} 23^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ}{1 - \operatorname{tg} 23^\circ \cdot \operatorname{tg} 37^\circ}$ es:

- a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Sólo una de las siguientes fórmulas es correcta:

- a) $\operatorname{tg} 2\beta = 2\operatorname{tg} \beta$
b) $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}$
c) $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$

a) $\operatorname{tg} 2\beta = 2\operatorname{tg} \beta$

9. Si $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 5$ y $\operatorname{tg} \beta = 2$ entonces:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$
c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{11}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{11}$

10. La solución de la ecuación $\operatorname{tg} \alpha = 0$ es:

- a) $\alpha = 0^\circ, \alpha = 180^\circ,$
b) $\alpha = 0^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$
c) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

2 cuestiones para investigar

1. Comprueba que el área de cualquier triángulo ABC viene dada por la fórmula $S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$

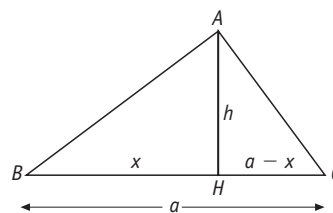


Fig. 7.1.

Observa la figura. El área del triángulo es, como siempre, $S = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. Por otra parte, al trazar la altura h sobre el lado a , dividimos al triángulo ABC en dos:

$$\begin{cases} \text{En el } ABH, \operatorname{tg} B = \frac{h}{x} \\ \text{En el } AHC, \operatorname{tg} C = \frac{h}{a-x} \end{cases}$$

Si despejamos x en la primera, $x = \frac{h}{\operatorname{tg} B}$, y sustituimos en la se-

gunda, $h = (a - x) \cdot \operatorname{tg} C = \left(a - \frac{h}{\operatorname{tg} B}\right) \cdot \operatorname{tg} C = a \cdot \operatorname{tg} C - h \cdot \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} \Rightarrow$

$$h \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}\right) = a \cdot \operatorname{tg} C \Rightarrow h = a \cdot \frac{\operatorname{tg} C}{1 + \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}} = a \cdot \frac{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

Llevando este valor de h a la fórmula del área,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

2. Compara la demostración clásica (con notación actual) de la fórmula de Herón que encontrarás en <http://www.arrakis.es/~mcj/heron.htm> con la demostración por métodos trigonométricos que aparece en <http://es.wikipedia.org/wiki/heron>.

Ver páginas web indicadas.

Actividades

1. Resuelve el triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa $a = 1$ cm y el cateto $c = 12$ cm.

$\text{sen } C = \frac{12}{15} = 0,8 \Rightarrow C = 53^\circ 7' 48''$. $B = 90^\circ$, $C = 36^\circ 52' 12''$. El cateto b , por Pitágoras, vale $b = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm.

2. Las diagonales de un paralelogramo de $19,15 \text{ cm}^2$ de área forman un ángulo de 50° al cortarse. Calcula la longitud de las diagonales si una mide el doble que la otra.

Si D es la diagonal mayor, la otra diagonal vale $\frac{D}{2}$. Por tanto el

$$\text{área del paralelogramo será } 19,15 = \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{D}{4} \cdot \text{sen } 50^\circ}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow D^2 = 99,994 \dots \Rightarrow D = 10$. Las diagonales miden 10 cm y 5 cm.

3. Del triángulo ABC se conocen los ángulos $\hat{A} = 62^\circ$, $B = 97^\circ$ y el lado $b = 4$ cm. Calcula la longitud del lado a .

Por el teorema del seno,

$$a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{4 \cdot \text{sen } 62^\circ}{\text{sen } 97^\circ} \approx 3,56 \text{ cm.}$$

4. Del triángulo ABC se conocen los lados $a = 15$ cm, $c = 10$ cm y el ángulo $B = 52^\circ$. Calcula la longitud del lado b .

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 52^\circ = 140,30 \Rightarrow b = \sqrt{140,3016} \approx 11,85$ cm.

5. Resuelve el triángulo ABC del que se conocen los siguientes datos: $\hat{A} = 52^\circ$, $B = 65^\circ$ y $c = 10$ m.

El tercer ángulo vale $C = 180^\circ - (\hat{A} + B) = 180^\circ - (52^\circ + 65^\circ) = 63^\circ$.

Del teorema del seno $a = \frac{c \cdot \text{sen } A}{\text{sen } C} = \frac{10 \cdot \text{sen } 52^\circ}{\text{sen } 63^\circ} = 8,84$ cm y

$$b = \frac{c \cdot \text{sen } B}{\text{sen } C} = \frac{10 \cdot \text{sen } 65^\circ}{\text{sen } 63^\circ} = 10,17 \text{ cm.}$$

6. Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63^\circ$.

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 27^2 + 11^2 - 2 \cdot 27 \cdot 11 \cdot \cos 63^\circ \approx 580,33 \Rightarrow b = 24,09$ m.

De los dos ángulos que faltan por determinar, el menor es C por ser el opuesto al lado menor. Lo calculamos por el teorema del seno:

$$\frac{11}{\text{sen } C} = \frac{24,09}{\text{sen } 63^\circ} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{11 \cdot \text{sen } 63^\circ}{24,09} \text{ Por tanto } C = 24^\circ 0' 26''$$

(un ángulo y su suplementario tienen el mismo seno. Así, C puede ser $24^\circ 0' 26''$ o su suplementario, $180^\circ - 24^\circ 0' 26'' = 155^\circ 59' 34''$). Pero como $c < b$ también ha de ser $C < B$, es decir $24^\circ 0' 26''$).

Por último $\hat{A} = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (63^\circ + 24^\circ 0' 26'') = 92^\circ 59' 34''$.

7. Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54^\circ$.

Por el teorema del seno

$$\frac{5}{\text{sen } A} = \frac{8}{\text{sen } 54^\circ} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{5 \cdot \text{sen } 54^\circ}{8} = 0,505635621.$$

De los dos ángulos que tienen este seno ($30^\circ 22' 25''$ y su suplementario, $149^\circ 37' 35''$) elegimos el menor, pues al ser $a < b$, será también $A < B$. Por tanto $A = 30^\circ 22' 25''$.

El tercer ángulo vale $C = 180^\circ - (\hat{A} + B) = 180^\circ - (30^\circ 22' 25'' + 54^\circ) = 95^\circ 37' 35''$.

El lado c se calcula por el teorema del seno:

$$c = \frac{b \cdot \text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{8 \cdot \text{sen } 95^\circ 37' 35''}{\text{sen } 54^\circ} \approx 9,84 \text{ m.}$$

8. Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30^\circ$.

Por el teorema del seno:

$$\frac{10}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{16}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{16 \cdot \text{sen } 30^\circ}{10} = 0,8. \text{ El ángulo } B \text{ puede ser } 53^\circ 7' 48'' \text{ o su suplementario, } 126^\circ 52' 12''.$$

Las dos soluciones son posibles, pues al ser $a < b$, la condición que tienen que cumplir es que $\hat{A} < B$. Hay por tanto dos soluciones:

Solución 1

$$B_1 = 53^\circ 7' 48''$$

$$C_1 = 180^\circ - (\hat{A} + B_1) = 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ 7' 48'') = 96^\circ 52' 12''.$$

$$\frac{10}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c_1}{\text{sen } 96^\circ 52' 12''} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{10 \cdot \text{sen } 96^\circ 52' 12''}{\text{sen } 30^\circ} \approx 19,86 \text{ cm.}$$

Solución 2

$$B_2 = 126^\circ 52' 12''$$

$$C_2 = 180^\circ - (\hat{A} + B_2) = 180^\circ - (30^\circ + 126^\circ 52' 12'') = 23^\circ 7' 48''.$$

$$\frac{10}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c_2}{\text{sen } 23^\circ 7' 48''} \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{10 \cdot \text{sen } 23^\circ 7' 48''}{\text{sen } 30^\circ} \approx 7,86 \text{ cm.}$$

9. Resuelve el triángulo ABC del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow$

$$6^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{241}{252} = 0,956349206, \text{ luego } \hat{A} = 16^\circ 59' 29''.$$

Análogamente calculamos el ángulo B :

$$9^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$\cos B = \frac{151}{168} = 0,898809523, \text{ luego } B = 25^\circ 59' 53''.$$

Por último, $C = 180^\circ - (\hat{A} + B) = 137^\circ 0' 38''$.