

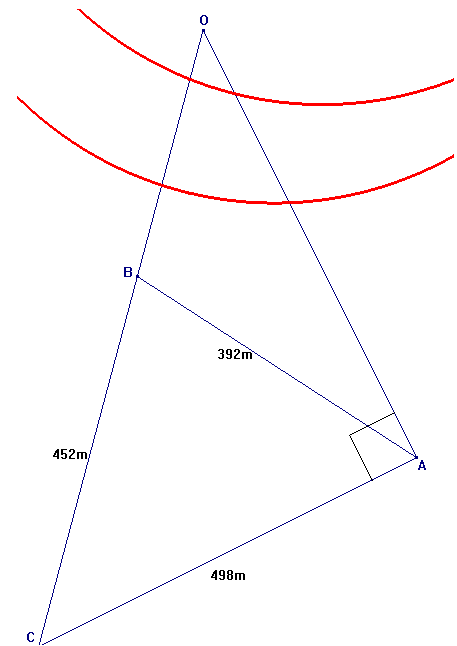
1.- Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo a tal que $\operatorname{sen} a = -1/3$ con $180^\circ < a < 270^\circ$.

Si además conocemos $\sec b = -2$ con $90^\circ < b < 180^\circ$. Sin utilizar la calculadora, halla:
 $\operatorname{sen}(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\operatorname{tg} 2a$ y $\operatorname{cotg}(b/2)$ (2,5 puntos)

2.- Sabiendo que a es un ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno es $-2/3$.

Calcula sin utilizar la calculadora y utilizando las fórmulas: $\operatorname{tg} 4a$
 (2 puntos)

3.- Para calcular la distancia desde dos puntos A y B a otro punto O situado al otro lado del río, se han hecho las medidas que se indican en el dibujo adjunto. Calcula las distancias OA y OB. (2 puntos)



4.- Comprueba la identidad:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x}$$

(1,75 puntos)

5.- Resuelve la ecuación: $\cos x \cdot \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$

(1,75 puntos)

SOLUCIONES

1.- Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo a tal que $\operatorname{sen} a = -1/3$ con $180^\circ < a < 270^\circ$. Hallamos el coseno y la tangente:

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sec b = -2 \text{ con } 90^\circ < b < 180^\circ \rightarrow \cos b = -\frac{1}{2}$$

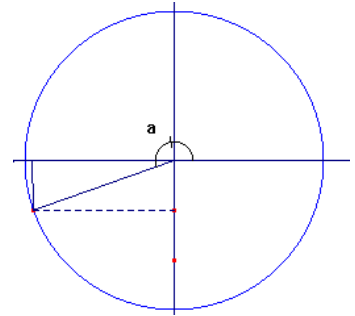
$$\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 b = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen} b = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} b = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{7}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\cot\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{b}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos b}{1-\cos b}} = + \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (primer cuadrante)}$$



2.- a es un ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno es $-2/3$ necesitamos la tangente de a :

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \rightarrow \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

y también necesitamos la tangente de $2a$:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}} = \sqrt{5} : \left(-\frac{1}{4}\right) = -4\sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} 4a = \operatorname{tg}(2a+2a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} 2a} = \frac{2\operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = \frac{2(-4\sqrt{5})}{1 - (-4\sqrt{5})^2} = \frac{-8\sqrt{5}}{-15} = \frac{8\sqrt{5}}{15}$$

3.- En el triángulo OAB, necesitamos algún ángulo, para ello vamos a utilizar el teorema del coseno en el triángulo ABC:

$$498^2 = 392^2 + 452^2 - 2 \cdot 392 \cdot 452 \cdot \cos \hat{A}BC$$

$$2 \cdot 392 \cdot 452 \cdot \cos \hat{A}BC = 392^2 + 452^2 - 498^2$$

$$\cos \hat{A}BC = \frac{392^2 + 452^2 - 498^2}{2 \cdot 392 \cdot 452} = 0,3103 \rightarrow \hat{A}BC \approx 72^\circ$$

$$\hat{O}BA = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

Hallemos ahora el ángulo $\hat{B}AC \rightarrow$ teorema de los senos:

$$\frac{452}{\sin \hat{B}AC} = \frac{498}{\sin 72^\circ} \rightarrow \sin \hat{B}AC = \frac{452 \sin 72^\circ}{498} \rightarrow \hat{B}AC \approx 59^\circ 40'$$

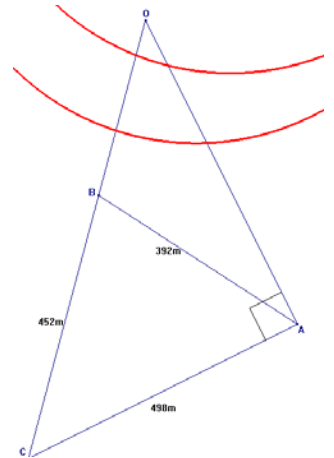
luego, el ángulo $\hat{B}AO = 90^\circ - 59^\circ 40' = 30^\circ 20'$

Ya podemos hallar el ángulo en O = $180^\circ - 108^\circ - 30^\circ 20' = 41^\circ 40'$

Ahora, aplicando el teorema de los senos en el triángulo OAB, tendremos las

$$\text{distancias pedidas: } \frac{392}{\sin 41^\circ 40'} = \frac{OB}{\sin 30^\circ 20'} = \frac{OA}{\sin 108^\circ}$$

$$OB = \frac{392 \sin 30^\circ 20'}{\sin 41^\circ 40'} = 297,79\text{m} \quad OA = \frac{392 \sin 108^\circ}{\sin 41^\circ 40'} = 560,79\text{m}$$



$$4.- \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} \rightarrow \left(\pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2 = \frac{2\sin x - 2\sin x \cos x}{2\sin x + 2\sin x \cos x}$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$5.- \cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos^3 x - \cos x \cdot \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^3 x - \cos x(1 - \cos^2 x) + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos^3 x - \cos x + \cos^3 x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\cos x(2\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 68^\circ 32' + 360^\circ k \\ x_4 = 291^\circ 28' + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$