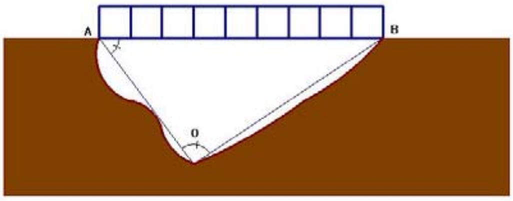
# EXAMEN TRIGONOMETRÍA

**1.** Sean a y b dos ángulos tales que $tg\ a = \frac{4}{5}$ siendo $a < \frac{\pi}{2}$ y $\cos b = -\frac{3}{7}$ siendo $\frac{\pi}{2} < b < \pi$.

Halla, sin utilizar la calculadora: $sen(a-b)$, $\cos(a+b)$, $tg\ 2a$, $\cot\left(\frac{b}{2}\right)$ **2 puntos**

2. Se quiere construir un puente entre los puntos A y B de la siguiente figura. Se sabe que $\hat{O} = 93^{o}$, $\hat{A} = 48^{o}$ y que la distancia, medida en línea recta entre los puntos A y O es de 75 m. Calcula la longitud del puente. **1,5 puntos**




3. Resuelve las ecuaciones:
   a. $tg\ 5x + tg^2 5x = 2$
   b. $\cos 2x = sen\ x$ **2,5 puntos**

4. Comprueba la identidad: $sen\ 2x = \frac{2tg\ x}{1+tg^2 x}$ **1,25 puntos**

5. Simplifica la expresión: $(\cot a - tg\ a)\left[tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right) - tg\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right]$ **1,25 puntos**

6. Representa gráficamente la función: y = sen $\frac{x}{4}$ **1,5 puntos**

**SOLUCIONES**

**1)** Empezamos hallando las restantes razones trigonométricas de a y b:

$$tg\ a = \frac{4}{5} \text{ siendo } a < \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \rightarrow 1 + \frac{16}{25} = \frac{1}{\cos^2 a} \rightarrow \frac{41}{25} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{25}{41} \Rightarrow \cos a = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41} \text{ (1º cuad)} \rightarrow sen\ a = \cos a \cdot tg\ a = \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$$

$$\cos b = -\frac{3}{7} \text{ siendo } \frac{\pi}{2} < b < \pi \rightarrow sen^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$$

$$sen\ b = \pm\sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \text{ (segundo cuadrante)} \rightarrow tg\ b = \frac{sen\ b}{\cos b} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

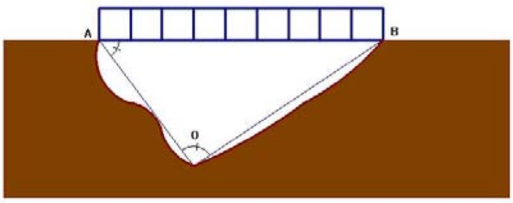
$$sen(a-b) = sen\ a \cdot \cos b - sen\ b \cdot \cos a = \frac{4\sqrt{41}}{41} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \frac{5\sqrt{41}}{41} = \frac{-12\sqrt{41} - 10\sqrt{410}}{287}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - sen\ a\ sen\ b = \frac{5\sqrt{41}}{41} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) - \frac{4\sqrt{41}}{41} \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} = -\frac{15\sqrt{41} + 8\sqrt{10}}{287}$$

$$tg\ 2a = \frac{2tg\ a}{1 - tg^2 a} = \frac{2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{8 \cdot 25}{5 \cdot 9} = \frac{40}{9}$$

$$\cot\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{tg\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}} = \sqrt{\frac{1+\cos b}{1-\cos b}} = (1^{\circ}\text{cuad}) = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{7}}{1+\frac{3}{7}}} = \sqrt{\frac{4}{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

2) $\hat{O} = 93^{\circ}$, $\hat{A} = 48^{\circ}$ y que la distancia entre los puntos A y O es de 75 m




el tercer ángulo: $\hat{B} = 180 - (93 + 48) = 39^{\circ}$

aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{AO}{sen\ B} = \frac{AB}{sen\ O} \rightarrow \frac{75}{sen\ 39} = \frac{x}{sen\ 93}$$

$$x = \frac{75 sen\ 93}{sen 39} = 119m$$

3) a) $tg\ 5x + tg^2 5x = 2 \rightarrow tg^2 5x + tg\ 5x - 2 = 0 \rightarrow z = tx\ 5x$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right. \rightarrow \left\langle \begin{matrix} tg\ 5x = 1 \\ tg\ 5x = -2 \end{matrix} \right. \rightarrow 5x = \left\langle \begin{matrix} 45^{\circ} + 180k \\ 116^{\circ}33' + 180k \end{matrix} \right. \rightarrow \left\langle \begin{matrix} x = 9^{\circ} + 36k \\ x = 23^{\circ}19' + 36k \end{matrix} \right.$$

b) $\cos 2x = sen\ x \rightarrow \cos^2 x - sen^2 x = sen\ x \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x = sen\ x$

$$2sen^2 x + sen\ x - 1 = 0 \rightarrow z = sen\ x \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} \rightarrow sen\ x = \frac{1}{2} \\ -1 \rightarrow sen\ x = -1 \end{matrix} \right.$$

$$x = \begin{cases} 30^\circ + 360k \\ 150^\circ + 360k \end{cases} \text{ y } x = 270^\circ + 360k$$

$$4)\ sen\ 2x = \frac{2tg\ x}{1+tg^2 x} \rightarrow 2sen\,x\cos x = \frac{2\dfrac{sen\,x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2sen\,x}{\cos x} : \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2sen\,x\cos^2 x}{\cos x}$$

$$\rightarrow 2sen\,x\cos x = 2sen\,x\cos x$$

$$5)\ (\cot a - tg\ a)\left[tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right) - tg\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\right] = \left(\frac{1}{tg\,a} - tg\,a\right)\left[\frac{tg\dfrac{\pi}{4}+tg\,a}{1-tg\dfrac{\pi}{4}tg\,a} - \frac{tg\dfrac{\pi}{4}-tg\,a}{1+tg\dfrac{\pi}{4}tg\,a}\right] =$$

$$= \left(\frac{1-tg^2 a}{tg\,a}\right)\left[\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a} - \frac{1-tg\,a}{1+tg\,a}\right] = \left(\frac{1-tg^2 a}{tg\,a}\right)\left[\frac{(1+tg\,a)^2-(1-tg\,a)^2}{1-tg^2 a}\right] =$$

$$= \left(\frac{1-tg^2 a}{tg\,a}\right)\left[\frac{1+tg^2 a+2tg\,a-(1+tg^2\,a-2tg\,a)}{1-tg^2 a}\right] = \left(\frac{1-tg^2 a}{tg\,a}\right)\frac{4tg\,a}{1-tg^2 a} = \frac{4tg\,a}{tg\,a} = 4$$

6) $y = sen\dfrac{x}{4}$ es una sinusoide, hacemos la tabla de valores (en radianes):

| x | 0 | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 |