

1.- Si  $\cos(80^\circ) = \frac{1}{5}$ , hallar el seno, el coseno y la tangente del ángulo de  $40^\circ$ . (1p)

2.- Enuncie y demuestre el teorema del coseno. (2p)

3.- Demuestre la siguiente expresión:  $\frac{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)} = \cot(x)$  (1p)

4.- Simplifique todo lo que pueda la siguiente expresión trigonométrica: (1p)

$$\frac{\cos(2a-b) - \cos(2a+b)}{\operatorname{sen}(2a+b) + \operatorname{sen}(2a-b)}$$

5.- De un triángulo sabemos que  $\frac{\operatorname{sen}(B+A)}{\operatorname{sen}(B-A)} = 1$ . Demuestre que se trata de un triángulo rectángulo en B. (1p)

6.- Calcule todos los ángulos comprendidos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  que verifiquen: (1p)

$$\operatorname{sen}(x) + \frac{4}{3} \cos^2(x) = \frac{3}{2}$$

7.- Sabiendo que  $\alpha$  es un ángulo del primer cuadrante y que  $\operatorname{sen}(\alpha) = h$ , calcule en función de h el valor de  $\cotg(180+\alpha)$ . (1p)

8.- Resuelva el triángulo ABC del cual se conoce:  $a=15$  cm,  $b=12$  cm y  $A-B=15^\circ$ . (1p)

9.- En el momento de marcar Brasil el último gol a Alemania, en la final de la Copa del Mundo de Corea-Japón, Ronaldo estaba situado a 15 m del poste izquierdo y a 14 m del derecho y veía la portería bajo un ángulo de  $30^\circ$ . Calcula la distancia del jugador a la línea de gol. (1p)

**Para Subir Nota:**

10.- Resuelve el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = 1 \end{cases}$$

## Solución

1.- Si  $\cos(80^\circ) = \frac{1}{5}$ , hallar el seno, el coseno y la tangente del ángulo de  $40^\circ$ . (1p)

Sabemos que 40 es la mitad de 80, así que utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \rightarrow \operatorname{sen}(40) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 80}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{4}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{4}{10}} = \pm \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \rightarrow \cos(40) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 80}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{6}{5}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{6}{10}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{\sqrt{150}}{25} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Reseñar que en las fórmulas del ángulo mitad aparece el doble signo ( $\pm$ ), y elegimos las raíces positivas porque el ángulo de  $40^\circ$  está en el primer cuadrante, y en éste todas las razones trigonométricas son todas positivas.

2.- Enuncie y demuestre el teorema del coseno. (2p) (ver libro)

Ver Libro

3.- Demuestre la siguiente expresión:  $\frac{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)} = \cot(x)$  (1p)

Si desarrollamos las razones trigonométricas de la suma y resta de ángulos, obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)} = \frac{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y)}{\cos(x) \cdot \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) - \cos(x) \cdot \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)} =$$

Operando después y simplificando llegamos a:

$$= \frac{\cancel{2} \cos(x) \cdot \cancel{\operatorname{sen}(y)}}{\cancel{2} \operatorname{sen}(x) \cdot \cancel{\operatorname{sen}(y)}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot(x)$$

Que es la expresión que buscábamos.

4.- Simplifique todo lo que pueda la siguiente expresión trigonométrica: (1p)

$$\frac{\cos(2a-b) - \cos(2a+b)}{\operatorname{sen}(2a+b) + \operatorname{sen}(2a-b)}$$

Al igual que en el ejercicio anterior, si desarrollamos las razones trigonométricas de suma y resta de ángulos, obtenemos:

$$\frac{\cos(2a-b) - \cos(2a+b)}{\operatorname{sen}(2a+b) + \operatorname{sen}(2a-b)} = \frac{\cos(2a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{sen}(b) - \cos(2a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(2a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(2a) + \operatorname{sen}(2a) \cdot \cos(b) - \cos(2a) \cdot \operatorname{sen}(b)} =$$

Que simplificando llegamos a:

$$= \frac{2 \operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{sen}(b)}{2 \operatorname{sen}(2a) \cdot \cos(b)} = \frac{\cancel{2} \operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{sen}(b)}{\cancel{2} \operatorname{sen}(2a) \cdot \cos(b)} = \tan(b)$$

5.- De un triángulo sabemos que  $\frac{\text{sen}(B+A)}{\text{sen}(B-A)} = 1$ . Demuestre que se trata de un triángulo rectángulo en B. (1p)

Operando tenemos que:

$\text{sen}(B+A) = \text{sen}(B-A)$ , expresión en la que, si los senos son iguales, pueden ocurrir dos cosas; o los ángulos son iguales, o los ángulos suman  $180^\circ$

$$\begin{cases} B+A = B-A & \rightarrow & 2A = 0 & \rightarrow & A = 0 \\ B+A+B-A = 180 & \rightarrow & 2B = 180 & \rightarrow & B = 90^\circ \end{cases}$$

Por tanto el triángulo es rectángulo en B.

Otra forma de demostrarlo, sería por **reducción al absurdo**. (Suponemos que es falso y llegamos a una contradicción)

Supongamos que no es rectángulo en B; entonces:  $\text{sen}(B+A) = \text{sen}(B-A)$

Si desarrollamos ambas sumas.  $\text{sen}B \cdot \cos A + \cos B \cdot \text{sen}A = \text{sen}B \cdot \cos A - \cos B \cdot \text{sen}A$

Y pasamos todo al primer miembro:  $\text{sen}B \cdot \cos A + \cos B \cdot \text{sen}A - \text{sen}B \cdot \cos A + \cos B \cdot \text{sen}A = 0$

Simplificando, llegamos a:  $2\cos B \cdot \text{sen}A = 0$  de donde  $\begin{cases} \text{Sen}A = 0 & \rightarrow & A = 0 \\ \text{Cos}B = 0 & \rightarrow & B = 90^\circ \end{cases}$

O sea, que llegamos a una contradicción, si suponemos que B no es recto, no puede salir 90.

6.- Calcule todos los ángulos comprendidos entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  que verifiquen: (1p)

$$\text{sen}(x) + \frac{4}{3}\cos^2(x) = \frac{3}{2}$$

Escribimos la ecuación en función de una sola razón trigonométrica:

$$\text{sen}(x) + \frac{4}{3}\cos^2(x) = \frac{3}{2} \rightarrow \text{sen}(x) + \frac{4}{3}(1 - \cos^2(x)) = \frac{3}{2}$$

Operando un poco,

$$\text{sen}(x) + \frac{4}{3}(1 - \text{sen}^2(x)) = \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{4}{3}\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right) = 0 \rightarrow -\frac{4}{3}\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) - \frac{1}{6} = 0$$

Llegamos a una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$8\text{sen}^2(x) - 6\text{sen}(x) + 1 = 0 \rightarrow \text{sen}(x) = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} \begin{cases} \text{sen}(x) = \frac{1}{2} & \rightarrow & x = \begin{cases} 30^\circ \\ 150^\circ \end{cases} \\ \text{sen}(x) = \frac{1}{4} & \rightarrow & x = \begin{cases} 14^\circ 28' 39'' \\ 106^\circ 31' 21'' \end{cases} \end{cases}$$

7.- Sabiendo que  $\alpha$  es un ángulo del primer cuadrante y que  $\text{sen}(\alpha) = h$ , calcule en función de h el valor de  $\cotg(180+\alpha)$ . (1p)

Si desarrollamos

$$\cot(180+\alpha) = \frac{\cos(180+\alpha)}{\text{sen}(180+\alpha)} = \frac{\cos 180 \cdot \cos \alpha - \text{sen} 180 \cdot \text{sen} \alpha}{\text{sen} 180 \cdot \cos \alpha + \cos 180 \cdot \text{sen} \alpha} = \frac{-\cos \alpha}{-\text{sen} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen} \alpha}$$

Como nos dicen que  $\text{sen} \alpha = h$ , utilizando la identidad fundamental de la trigonometría:

$$h^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - h^2}$$

Como el ángulo es del primer cuadrante, tenemos que  $\cos \alpha = \sqrt{1 - h^2}$ , y por tanto si sustituimos en la igualdad anterior, tenemos:

$$\cot(180 + \alpha) = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}$$

8.- Resuelva el triángulo ABC del cual se conoce:  $a=15$  cm,  $b=12$  cm y  $A-B=15^\circ$ . (1p)

Si  $A-B=15$ , entonces  $A=B+15$ . Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow \frac{15}{\operatorname{sen}(B+15)} = \frac{12}{\operatorname{sen} B} \rightarrow 15 \cdot \operatorname{sen} B = 12 \cdot \operatorname{sen}(B+15)$$

Desarrollando el seno de la suma:

$$15 \cdot \operatorname{sen} B = 12 \cdot \operatorname{sen}(B+15) \rightarrow 15 \cdot \operatorname{sen} B = 12 \cdot (\operatorname{sen} B \cdot \cos 15 + \cos B \cdot \operatorname{sen} 15)$$

Y operando para despejar  $\cos B$ :

$$15 \cdot \operatorname{sen} B - 12 \operatorname{sen} B \cdot \cos 15 = 12 \cos B \cdot \operatorname{sen} 15 \rightarrow (15 - 12 \cos 15) \cdot \operatorname{sen} B = 12 \cos B \cdot \operatorname{sen} 15$$

Obtenemos:

$$\frac{(15 - 12 \cos 15)}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \cdot \operatorname{sen} B = \cos B$$

Si cambiamos el  $\cos B$  por  $\cos B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 B}$ , utilizando la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\frac{(15 - 12 \cos 15)}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \cdot \operatorname{sen} B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 B}$$

Elevando al cuadrado y operando, llegamos a:

$$\left( \frac{15 - 12 \cos 15}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \right)^2 \cdot \operatorname{sen}^2 B = 1 - \operatorname{sen}^2 B \rightarrow \left[ \left( \frac{15 - 12 \cos 15}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \right)^2 + 1 \right] \cdot \operatorname{sen}^2 B = 1$$

Y despejando el seno de B:

$$\left[ \left( \frac{15 - 12 \cos 15}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \right)^2 + 1 \right] \cdot \operatorname{sen}^2 B = 1 \rightarrow \operatorname{sen} B = \sqrt{\frac{1}{\left[ \left( \frac{15 - 12 \cos 15}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \right)^2 + 1 \right]}}$$

Por tanto el ángulo B es:

$$B = \arcsen \left( \sqrt{\frac{1}{\left[ \left( \frac{15 - 12 \cos 15}{12 \cdot \operatorname{sen} 15} \right)^2 + 1 \right]}} \right) = 42^\circ 20' 12''$$

Una vez calculado el ángulo B, A viene dado por  $A = B + 15 = 42^\circ 20' 12'' + 15^\circ = 57^\circ 20' 12''$

Y una vez conocidos A y B, calculamos C, mediante:  $C = 180 - (A + B) = 80^\circ 19' 37''$

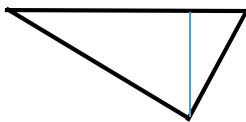
Hecho esto, utilizando el teorema del seno, obtenemos el valor del lado c:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 80^{\circ} 19' 37''}{\operatorname{sen} 57^{\circ} 20' 12''} = 17,6 \text{ cm}$$

9.- En el momento de marcar Brasil el último gol a Alemania, en la final de la Copa del Mundo de Corea-Japón, Ronaldo estaba situado a 15 m del poste izquierdo y a 14 m del derecho y veía la portería bajo un ángulo de  $30^{\circ}$ . Calcula la distancia del jugador a la línea de gol. (1p)

Como tenemos dos lados y el ángulo que forman, tenemos que utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C} = \sqrt{15^2 + 14^2 - 2 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \cos 30} = 7,57 \text{ m}$$



Conocidos los tres lados, utilizando el teorema del seno, calculamos el ángulo A

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \rightarrow A = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a \cdot \operatorname{sen} C}{c}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{15 \cdot \operatorname{sen} 30}{7,57}\right) = 82^{\circ} 12' 8''$$

Y ahora fijándonos en el triángulo rectángulo de la derecha:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} A = 14 \cdot \operatorname{sen} 82^{\circ} 12' 8'' = 13,87 \text{ m}$$

Por tanto Ronaldo está a 13,87 de la línea de Gol.

10.- Resuelve el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \operatorname{sen}(x - y) = 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, obtenemos:  $x - y = 90^{\circ} + 360K \rightarrow x = 90 + y$

Que sustituyendo en la primera ecuación nos da:

$$\operatorname{sen}(90 + y) + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Usando la fórmula de transformación se sumas en productos:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Llegamos a:

$$\operatorname{sen}(90 + y) + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(45 + y) \cdot \cos(45) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Y de aquí:

$$\operatorname{sen}(45 + y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \operatorname{sen}(45 + y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 45 + y = 60 \rightarrow y = 15^{\circ}$$

Y como  $x = 90 + 15^{\circ}$

Así que la solución del sistema es: 
$$\begin{cases} x = 105^{\circ} \\ y = 15^{\circ} \end{cases}$$